UNIVERSITE HASSAN II – AIN CHOCK

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'ELECTRICITE ET DE MECANIQUE

CONCOURS D'ACCES EN 1 ère ANNEE

2010-2011

DEUD MP, PC

Attention :

Les candidats doivent obligatoirement rédigées les deux parties Analyse et Algèbre sur deux copies séparées.

Mathématiques I
– Algèbre - Durée 1h30

Aucun instrument de calcul n'est autorisé. Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé d'algèbre comporte 2 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

On considère l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et on note $\mathcal{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ on a donc :

$$< x, y >= {}^tXY$$

où X et Y désignent les matrices colonnes des coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Si F e un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $F^\perp$ désigne le supplémentaire orthogonal de F dans $\mathbb{R}^3$ On n $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ et Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$. Pour f endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, de matrice M dans la base canonique, on note f^* l'endomorphisme d $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est ${}^tM$.

Partie I

Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1) Montrer que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \quad < f(x), y >=< x, f^*(y) >$$

2) Montrer que f^* est le seul endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \quad < f(x), y >=< x, g(y) >$$

3) Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par f (c'est-à-dire tel que $f(F) \subset F$).

a) Pour $x \in F$ et $y \in F^\perp$, calculer $< x, f^*(y) >$.

b) En déduire que $F^\perp$ est stable par f^*.

Partie II

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes f_u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

où $u = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

1) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

2) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, f_u^* appartient à $\mathcal{E}$.

3) On note $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i-j)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(i+j-2k)$ et $\mathcal{D}$ la droite de vecteur directeur e_1 .

   a) Montrer que e_1 est un vecteur propre commun aux éléments f_u de $\mathcal{E}$.

   b) En déduire que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}$ est stable par f_u .

   c) Déduire des questions précédentes que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}^\perp$ est stable par f_u .

   d) Déterminer une équation de $\mathcal{D}^\perp$.

   e) Montrer que (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathcal{D}^\perp$ et que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

   f) Justifier alors que la matrice de f_u dans la base $\mathcal{B}'$ est de la forme

$$N_u = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & \ell \end{pmatrix}$$

où e , f , g , h , ℓ sont des réels.